

OPTIMIZAVIMAS IR TAIKYMAI

J.Mockus

Konsultacijos:

jonas2@optimum2.mii.lt

Mokymo priemonės tai tinklapiai:

[http : //soften.ktu.lt/~mockus](http://soften.ktu.lt/~mockus)

[http : //optimum2.mii.lt/~jonas2](http://optimum2.mii.lt/~jonas2)

[http : //eta.ktl.mii.lt/ mockus](http://eta.ktl.mii.lt/mockus)

[http : //mockus.us/optimum](http://mockus.us/optimum)

2004-04-01

Optimalumas

Tikslo funkcija

$$f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_m). \quad (1)$$

Globalus minimumas

$$f(x_A) \leq f(x) \quad x \in A, \quad (2)$$

arba

$$x_A = \arg \min_A f(x), \quad (3)$$

kur A leistina sritis.

Lokalus minimumas

$$f(x_\epsilon) \leq f(x) \quad x \in \epsilon, \quad (4)$$

kur ϵ taško x_ϵ aplinka.

Matematinis programavimas

Discretus programavimas

Kai x_i diskretus.

Tiesinis programavimas

Kai

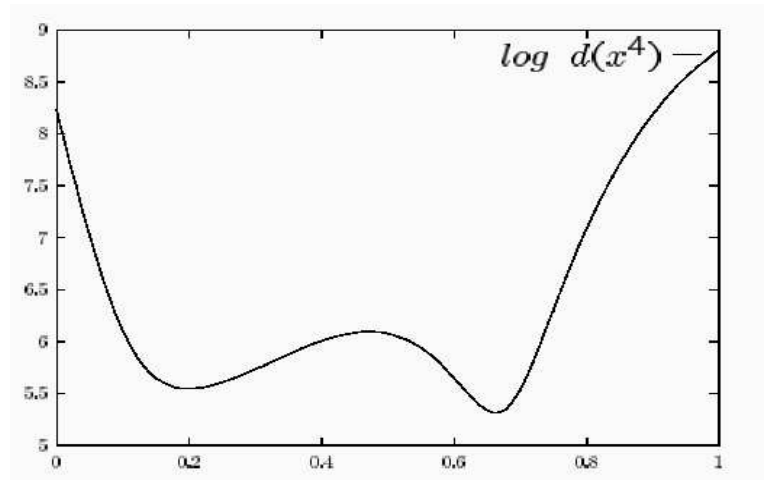
$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad (5)$$

$$A : \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad x_i \geq 0. \quad (6)$$

Iškilas programavimas

Kai tikslo funkcija $f(x)$ ir leistina aibė A yra abi iškilos.

Globalus ir lokalus minimumai. fig-1



Globalus ir lokalus minimumai

Lokalus minimumas $x = 0.2$,

globalus minimumas $x = 0.66$.

Funkcija daugia-ekstremali intervale $[0.0, 1.0]$,

tačiau, iškila intervaluose $[0.0, 0.3]$ ir $[0.6, 0.8]$, bei uni-modali intervaluose $[0.0, 0.48]$ ir $[0.48, 1.0]$.

Lošimų ir rinkos teorijos modeliai

Pusiausvyros ieškojimas

Pusiausvyra tai sutartis kurios laužyti neverta.

Pavyzdžiai: konkurencijos, inspekcijos ir dvikovos modeliai.

Prognozė

Pavyzdžiai:

valiutų ir akcijų kursai,

”call-center” užsakymai.

Optimalus investavimas

Pavyzdžiai:

Portfelio uždavinys bei optimalus draudimas.

Tvarkaraščiai, dinaminis programavimas

Tvarkaraščių optimizavimas

Pavyzdžiai:

siuvykla ir mokykla.

Nuoseklūs sprendimai

Pavyzdžiai:

jaunikio, kompiuterio,
bei automobilio issirinkimas.

Nash'o pusiausvyra

Severių konkurencija, Nash'o variantas

- Serverio i pelnas

$$u_i = a_i y_i - x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i = a, \quad (8)$$

kur a užsakymų intensyvumas.

- Užsakymas renkasi serverį i^* , jei

$$h_{i^*} \leq h_i, \quad i = 0, \dots, m, \quad (9)$$

$$h_i = y_i + \gamma_i, \quad \gamma_i = n_i/x_i. \quad (10)$$

- y_i aptarnavimo kaina, γ_i laukimo kaina.

Optimali sutartis

- Sutartis optimali, jei jos neapsimoka laužyti. Tegu sutartinis vektorius (\bar{y}_i, \bar{x}_i) . tada "apgavystės" vektorius

$$(\bar{y}_i, \bar{x}_i) = \arg \max_{(y_i, x_i)} u_i(y_i, x_i, \bar{y}_j, \bar{x}_j, j \neq i), \quad (11)$$

- Sutartis $x = (\bar{y}_i, \bar{x}_i, i = 1, \dots, m)$ optimali, kai

$$\min_x f(x) = 0, \quad (12)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m ((\bar{y}_i - y_i)^2 + (\bar{x}_i - x_i)^2). \quad (13)$$

Stabilios koalicijos

Koalicija stabili, jei neapsimoka iš jos pasitraukti, $m = 3$.

S_1 "koalicija" iš vieno serverio,

S_2 koalicija iš dviejų simetriškų serverių,

S_3 monopolis.

Dalinant visų koalicijos narių

maksimalų garantuotą pelną po lygiai

$$u_i(S_3) = (u_i + u_j + u_k)/3,$$

$$u_i(S_2) = (u_i + u_j)/2,$$

$$u_i(S_1) = u_i.$$

Monopolis stabilus kai

$$u_i(S_3) \geq \max\{u_i(S_2), u_i(S_1)\}.$$

Laisva individuali konkurencija stabili kai

$$u_i(S_1) \geq \max\{u_i(S_2), u_i(S_3)\}.$$

Walras'o uždavinys

Serverio i pelnas

$$u_i = a_i y_i + p_i \sum_{j \neq i} x_{ji} - \sum_{j \neq i} p_j x_{ij}, \quad , i, j = 1, 2. \quad (14)$$

(15)

Čia laukimo kaina

$$\gamma_i = n_i / w_i, \quad (16)$$

$$w_i = c_{0i} (1 - e^{-c_{ii} x_{ii} - c_{ij} x_{ij}}), \quad (17)$$

kur w_i serverio i galingumas,

x_{ii} savi resursai, x_{ij} partnerio j resursai,

c resursų efektyvumas.

Resursų balanso sąlyga:

$$x_{ii} + x_{ij} = b_i, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

kur b_i serverio i resursas.

Inspektoriaus uždavinys

Inspektoriaus pelnas

$$u(i, j) = \begin{cases} p_i g_i q_j, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

Brakonieriaus pelnas

$$v(i, j) = \begin{cases} -p_i g_j q_j + (1 - p_i) g_j q_j, & \text{if } i = j \\ g_j q_j, & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (20)$$

kur p_i sugavimo tikimybė miške i , q_i nušovimo tikimybė, g_i "briedžio" kaina.

Vidutiniai pelnai

$$U(x, y) = \sum_{i,j} x_i u(i, j) y_j, \quad (21)$$

$$V(x, y) = \sum_{i,j} x_i v(i, j) y_j, \quad (22)$$

x_i, y_i inspektoriaus ir brakonieriaus
tikimybės eiti į "mišką" i .

Optimali inspekcija

Pelnų suvienodinimas

$$\sum_{j=1}^m u(i, j)y_j^0 = U, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m v(i, j)x_i^0 = V, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m y_i = 1 \quad (23)$$

Jei sprendinys x, y tenkina sąlygas

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

tai jis nurodo optimalią inspekciją.

Jei ne, tai tikrinam pusiausvyros sąlygas visuose pelno lentelių langeliuose tikslu

surasti pusiausvyros situaciją
grynų strategijų aibėje.

Inspekcijos pavyzdys

Tegu $q_i = g_i = 1$. Tada iš (19) ir (20)

$$u(i, j) = \begin{cases} p_j, & \text{jei } i = j \\ 0, & \text{jei ne,} \end{cases} \quad (24)$$

$$v(i, j) = \begin{cases} -p_i + (1 - p_i), & \text{jei } i = j \\ 1, & \text{jei ne.} \end{cases} \quad (25)$$

Iš čia ir (23)

$$p_j y_j = U, \quad j = 1, \dots, m \quad (26)$$

$$\sum_{i \neq j} x_i + (1 - 2p_j)x_j = V, \quad j = 1, \dots, m \quad (27)$$

$$\sum_j y_j = 1, \quad \sum_i x_i = 1, \quad y_j \geq 0, \quad x_i \geq 0$$

Kai $m = 2$ iš (26) (27)

$$y_1 = x_1 = p_2 / (p_1 + p_2), \quad (28)$$

$$y_2 = x_2 = p_1 / (p_1 + p_2), \quad (29)$$

Pavyzdžio sprendinys

$$\begin{aligned}u^* &= U = p_1 p_2 / (p_1 + p_2), \\v^* &= V = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2 / (p_1 + p_2).\end{aligned}\tag{30}$$

Kai $p_1 = 1/3, p_2 = 2/3$ gaunam

$x_1^* = y_1^* = 2/3, x_2^* = y_2^* = 1/3, u^* = 2/9, v^* = 5/9$ Bendresniu atveju

$$y_i = x_i = \prod_{k \neq i} p_k / \left(\sum_i \prod_{k \neq i} p_k \right),\tag{31}$$

$$\tag{32}$$

kur $\prod_{k \neq i} p_k$ tai sandauga visų p_k iškyrus p_i .

Dvikova

Kaunasi du skraidantys objektai.

Jų judesius aprašo dif-lygtys

$$dz(t)/dt = az(t), \quad (33)$$

$$dw(\tau)/d\tau = bw(\tau), \tau = 2 - t, \quad (34)$$

kurių sprendiniai

$$z(t) = z_0 e^{at}, \quad w(\tau) = w_0 e^{b\tau}. \quad (35)$$

Pataikymo tikimybė

$$p(t) = 1 - d(t)/D, \quad (36)$$

kur $d(t)$ atstumas tarp objektų momentu t ,

D maksimalus atstumas.

Optimali dvikova

Naudingumo funkcijos

$$U(t_1, t_2) = \begin{cases} p(t_1) - (1 - p(t_1)), & \text{if } t_1 < t_2, \\ -p(t_2) + (1 - p(t_2)), & \text{if } t_2 < t_1, \\ 0, & \text{if } t_2 = t_1, \end{cases}$$

$$V(t_1, t_2) = \begin{cases} p(t_2) - (1 - p(t_2)), & \text{if } t_2 < t_1, \\ -p(t_1) + (1 - p(t_1)), & \text{if } t_1 < t_2, \\ 0, & \text{if } t_2 = t_1. \end{cases}$$

Optimalios pradinės sąlygos

Simetrišku atveju
optimalūs šovimo momentai kai

$$p(t_1) = p(t_2) = 0.5. \quad (37)$$

Optimalius pradinis auksčius z_0, w_0 bei kilimo greičius a, b randam iš pusiausvyros sąlygų
naudodami mišrias strategijas
kurias nustatom tiesiniu programavimu.

Ekonominė dvikova

Dinaminė dviejų serverių konkurencija

Serverių pelno funkcijos

$$U_i(T) = \int_{t_0}^T u_i(t) dt, \quad (38)$$

$$u_i(t) = a_i(t)y_i(t) - x_i(t), \quad (39)$$

kur

$u_i(t)$ serverio i pelnas momentu t ,

$a(t) = \sum_i a_i(t)$ užsakymų srautas.

Tegu aptarnavimo kaina $y_i(t)$ ir išlaidos $x_i(t)$

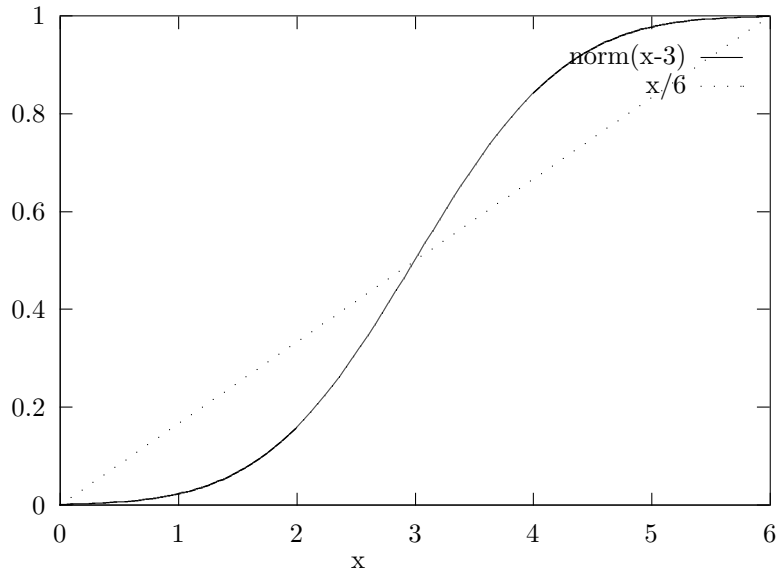
$$dy_i(t)/dt = ay_i(t), \quad dx_i(t)/dt = bw_i(t). \quad (40)$$

Rasti pradines reikšmes $y_i(0), x_i(0)$, bei kitimo greičius a, b , nusakančias maksimalų garantuotą pelną.

Severis i bankrutuoja momentu t^* , jei $U_i(t^*) < -U^*$.
Tada likęs severis gauna monopolinį pelną.

Portfelio uždavinys

Figura 2: Naudingumo funkcija $u(x)$.



turtingo asmens ...

vidutinio asmens -

investuojamas kapitalas x

visas kapitalas 6.0

rizikos zona [0.0, 3.0]

atsargumo zona [3.0,6.0]

Loterija

Kapitalo $0 \leq C \leq 1$ naudingumą $u(C)$
nustatom pagal loteriją

$$C \sim \{pA + (1 - p)B\}, \quad (41)$$

kur

išlošimo C naudingumas $u(C) = p$,

p tikimybė išlošti viską $A = 1$,

$1 - p$ tikimybė nieko neišlošti $B = 0$.

Ženklas \sim nusako "slyravimo tikimybę" p ,

kada asmeniui neaišku kas geriau:

- ar išsaugoti turimą kapitalą C ,
- ar dalyvauti loterijoje tikintis išlošti A .

Laukiamas naudingumas

$$U(x) = \sum_{k=1}^M u(y^k)p(y^k) \quad (42)$$

$y^k = \sum_{i=1}^m \delta_i c_i x_i$ kapitalas kurį gausim po metų,

$u(y^k)$ kapitalo y^k naudingumas,

x_i kapitalas įdetas dabar į banką i ,

$c_i = 1 + \alpha_i$, α_i banko i palūkanos,

$\delta_i = 1$ jei bankas i nebankrutuoja,

$\delta_i = 0$ jei bankas i bankrutuoja

$p(y^k)$ tikimybė, kad gausim kapitalą y^k ,

pavyzdžiui,

$$p(y^1) = p_1 \prod_{i \neq 1} (1 - p_i),$$

Čia $y^1 = c_1 x_1$,

p_i tikimybė, kad bankas i nesubankrutuos.

Optimalus draudimas

Laukiamas naudingumas

$$U(x) = \sum_{k=1}^M u(y^k)p(y^k).$$

Čia $p(y^k)$ tikimybė, kad po metų turėsime turtą $y^k = \sum_{i=1}^m c_i(x_i)$, $u(y^k)$ turto y^k naudingumas.

$$c_i(x_i) = \begin{cases} z_i - a_i x_i, & \text{jei } \delta_i = 1 \\ (1 - a_i)x_i, & \text{jei } \delta_i = 0, \end{cases} \quad (43)$$

kur z_i objekto i vertė ,

$a_i x_i$ objekto i draudimo mokestis,

$x_i \leq z_i$ objekto i draudimas.

$\delta_i = 0$ jei objektas i žus,

$\delta_i = 1$ jei nežus,

$p_i = P\{\delta_i = 1\}$ tikimybė, kad objektas i nežus.

Optimalus draudimas - pavyzdys

$$p(y^1) = p_1 \prod_{i \neq 1} (1 - p_i),$$

$$y^1 = c_1(x_1) + \sum_{i=2}^m c_i(x_i), \text{ kur}$$

$$c_1(x_1) = z_1 - a_1 x_1, c_i(x_i) = (1 - a_i) x_i, \quad i = 2, \dots, m.$$

Prognozė

ARMA modelis

Tai auto-regresijos slenkančio vidurkio modelis

$$w_t = \sum_{i=1}^p a_i w_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t. \quad (44)$$

Pavyzdžiui ,

w_t akcijų kursas rytoj

w_{t-1} akcijų kursas šiandien,

ϵ_t atsitiktinė paklaida rytoj,

a_i, b_j įtakos koeficientai,

juos nustatom minimizuodami

$$f(x) = \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2, \quad (45)$$

kur $x = (x_1, \dots, x_{p+q})$, $x_i = a_i$, $i = 1, \dots, p$, $x_i = b_{i-p}$, $i = p+1, \dots, p+q$.

Akcijų biržos lošimas

Vienas akcinė bendrovė, du klientai $i = 1, 2$,
Momentu t klientas i perka vieną akcija, jei

$$z(t) \leq z_i^{min}(t), \quad (46)$$

kur

$z(t)$ akcijų kursas laiku t ,

$z_i^{min}(t)$ pirkimo "slenkstis".

Momentu t klientas i parduoda akcija, jei

$$z(t) \geq z_i^{max}(t), \quad (47)$$

kur

$z_i^{max}(t)$ pardavimo slenkstis.

Biržos modelis

Akcijų kursas momentu $t + 1$ nusakomas pagal aukščiausią pirkimo kainą momentu t bei žemiausią pardavimo kainą momentu t :

$$z(t + 1) = \begin{cases} z(t) + \epsilon(t + 1), & z^{min}(t) < z(t) < z^{max}(t), \\ z^{min}(t) + \epsilon(t + 1), & z(t) \leq z^{min}(t), \\ z^{max}(t) + \epsilon(t + 1), & z(t) \geq z^{max}(t). \end{cases}$$

Čia

$$z^{min}(t) = \max_i z_i^{min}(t), \quad (48)$$

$$z^{max}(t) = \min_i z_i^{max}(t). \quad (49)$$

Laukiamas akcijos pelnas

Laukiamas santykinis akcijos pirkimo pelnas:

$$\Delta_i(t+1) = (\beta_i(t+1) + \delta(t+1) - \alpha(t+1)) z(t). \quad (50)$$

$$\beta_i(t+1) = \frac{z_i(t+1) - z(t)}{z(t)}, \quad (51)$$

kur $z_i(t+1)$ akcijų kursas

kurio tikisi klientas i laiku $t+1$

$$\delta(t+1) = \frac{d(t+1)}{z(t)}, \quad (52)$$

kur $d(t+1)$ akcijos dividendai

$$\alpha(t+1) = a(t+1)/z(t), \quad (53)$$

kur $a(t + 1)$ terminuoto indėlio palūkanos laiku $t + 1$.

Pirkimo-pardavimo slenkstis

Pirkimo slenkstis

$$z_i^{min}(t) = k_{buy} \Delta_i(t), \quad k_{buy} > 1. \quad (54)$$

Pardavimo slenkstis

$$z_i^{max}(t) = k_{sell} \Delta_i(t), \quad k_{sell} < 1. \quad (55)$$

Akcijų skaičius pas klientą i laiku t

$$N_i(t+1) = \begin{cases} N_i(t), & \text{if } z_i^{min}(t) < z(t) < z_i^{max}(t), \\ N_i(t) + 1, & \text{if } z(t) \leq z_i^{min}(t), \\ N_i(t) - 1, & \text{if } z(t) \geq z_i^{max}(t) \end{cases}$$

Klientų prognozės

Laukiamas kliento i pelnas laike $T_0 \leq t \leq T$

$$u_i(T, T_0) = N_i(T)z_T - N(T_0)z_{T_0} - \sum_{t=T_0}^T (N_i(t+1) - N_i(t)) z(t).$$

Pelnas u_i priklauso nuo prognozės $\beta_i(t+1)$ ir nuo atsitiktinių poveikių $\epsilon(t)$. Jei klientas i naudoja AR modelį, kur $a^k = (a_i^k, i = 1, \dots, p_i)$, tai

$$z_i(t+1) = \sum_{k=1}^{p_i} a_i^k z_{t-k} + \epsilon_i(t+1). \quad (56)$$

Modelis skirtas akcijų biržai modeliuoti bet ne akcijų kursui prognozuoti.

AR parametrai

Klientai savo AR modlių parametrus nustato tradiciniu mažiausių kvadratų metodu

$$a^k = \arg \min_{a^k} \sum_{s=t_0}^t \epsilon_i^2(s), \quad (57)$$

$$\epsilon_i(s) = z(s) - \sum_{k=1}^{p_i} a_i^k z(s - k). \quad (58)$$

Biržos Nash'o modelis

Ieškome tokių (p_1, p_2) kurių keisti neapsimoka.

Naudojame mišrias strategijas

$$\begin{aligned} x_{p_i}, \quad i = 1, 2, \quad p_i = 1, \dots, P_i, \quad \sum_{p_i=1}^{P_i} x_{p_i} = 1, \\ 0 \leq x_{p_i} \leq 1. \end{aligned} \quad (59)$$

kur x_{p_i} tai tikimybė, kad "atsiminsim" p_i "dienų".

"Apgavinis" vektorius:

$$x_{p_1}^1 = \arg \max_{x_{p_1}} u_1^K(T_0, T, x_{p_1}, x_{p_2}^0), \quad (60)$$

$$x_{p_2}^1 = \arg \max_{x_{p_2}} u_1^K(T_0, T, x_{p_1}^0, x_{p_2}) \quad (61)$$

kur $x_{p_i}^0$, $i = 1, 2$ sutartinis vektorius.

Nash'o pusiausvyra biržoje

Nash'o pusiausvyra:

$$\arg \min_{x_{p_1}^0, x_{p_2}^0} \left\| (x_{p_1}^1, x_{p_2}^1) - (x_{p_1}^0, x_{p_2}^0) \right\|^2 \quad (62)$$

Minimizuojam stochastiniais globaliais metodais.

Jei minimumas didelis,

tikrinam pusiausvyros egzistavimo sąlygas

tirdami pelno funkcijų iškilumą.

Galutinis tikslas

-nustatyti optimalią AR modelio "atmintį".

Be to, įdomu palyginti ARMA prognozes

naudojant biržos modelį bei realius duomenis.

Mastelių modelis

$$Z_i = z_{p(i)} s_{p(i)}. \quad (63)$$

$Z_i = (z_{ij}, j = 1, \dots, m)$ prognozuojamas valandinis grafikas dienai i ,

z_{ij} vidutinė reikšmė dienos i valandą j ,

$z_{p(i)}$ vidutinė reikšmė diena $p(i)$,

$p(i)$ nurodo tą dieną kuri buvo panaši į dieną i .

Panašūs būna sekmadieniai, šeštadieniai,
darbo dienos ir pan.

Todel, kito sekmadienio grafikas bus tas pats,
tik mastelis bus kitas. Mastelis

$$s_{p(i)} = \frac{z_{i-1}}{z_{p(i-1)}}. \quad (64)$$

Čia z_{i-1} šios dienos vidurkis,

$z_{p(i-1)}$ panašios dienos vidurkis, kur $p(i-1) < p(i)$.

” Call Center” modelis

Užsakymų generavimas

$$F_a(t) = P\{\tau < t\}$$

tikimybė, kad laikas iki kito užsakymo τ

bus mažesnis už t ,

a vidutinis užsakymu skaičius per valandą.

Puasono sraute

$$F_a(t) = 1 - e^{-1/at}, \quad (65)$$

$$\tau = -a \ln(1 - \xi). \quad (66)$$

kur ξ tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$.

Kai aptarnavimo laikas eksponentinis

$$F_x(t) = 1 - e^{-1/xt}, \quad (67)$$

$$\tau = -x \ln(1 - \xi), \quad (68)$$

kur x serverio galingumas (užs./val.)

Serverių skaičiaus optimizavimas

Puasono atveju vidutinis laukimo laikas

$$\gamma = \frac{a}{mx(mx - a)}, \quad (69)$$

x vieno serverio galingumas,

m serverių skaičius.

Bendros aptarnavimo išlaidos

$$c(a, m) = c_m m + c_\gamma(a) \gamma \quad (70)$$

c_m išlaidos vieno serverio išlaikymui,

$c_\gamma(a)$ laukimo laiko piniginis įvertinimas.

Optimalus serverių skaičius

$$m(a) = \min_m c(a, m). \quad (71)$$

Optimizuojant m svarbu prognozuoti a .

Tvarkaraščių optimizavimas

Siuvyklos ("flow-shop") uždavinys

Čia mašinų eilės tvarką nusako technologija, pavyzdžiui: žirklys, adata, lygintuvas

Operacijų laikai τ_{ij} rodo kiek laiko reikia atlikti darbą i su mašina j ,

pavyzdžiui, τ_{ij} sako

kiek laiko kerpam švarką i su žirkliemis j

Optimizuojam darbų trukme ("make-span")

Jei darbų nedaug, galim peržiūrėti visas darbų sekas, pavyzdžiui, 2, 1, 4, 6, 5, 3, 7

Jei daug, naudojame heuristinius metodus, t.y.

taikom ekspertines išrinkimo taisykles,

bei optimizuojame jų tikimybes,

efektyvumui padidinti.

Mokyklos tvarkaraščio optimizavimas

Čia darbai tai mokinių klasės,
mašinos tai disciplinos,
mašinių eilės tvarka laisva,
resursai tai mokytojai ir specialūs kabinetai,
tikslas minimizuoti mokytojų "langus",
mokinių langai neleistini.

Pradinis tvarkaraštis gerinamas

heuristiniais metodais:

jei atsitiktinis skaičius $\xi < x$, $\xi \in [0, 1]$

tai eilinio mokytojo langas keičiamas

į "patogią" pamoką

priešingu atveju, mokytojas praleidžiamas,

Patogi yra pirma arba paskutinė pamoka.

Praleidimo tikimybė $1 - x$ optimizuojama

efektyvumui padidinti.

Nuoseklūs sprendimai

”Vienkartinės” nuotakos uždavinys

Čia nuotaka teka tik vieną sykį.

Galimų jaunikių skaičius N .

Jaunikio gerumas ω .

Gerumų pasiskirstymas Gauso

$$p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-1/2\left(\frac{\omega-\alpha_0}{\sigma_0}\right)^2}, \quad (72)$$

kur α_0 vidutinis gerumas,

σ_0^2 gerumo išsibarstymas.

Nuotakos įspudis s apie jaunikio gerumą

taip pat Gauso

$$p(s|\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\left(\frac{s-\omega}{\sigma}\right)^2}. \quad (73)$$

kur σ nuotakos stebėjimo paklaida.

Gerumo įvertinimas kai įspudis s

Jaunikių gerumą ω kai įspudis s nusako Bayes'o formulė

$$p(\omega|s) = \frac{p(s|\omega)p(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(s|\omega)p(\omega)d\omega}. \quad (74)$$

Laukiamas jaunkio naudingumas kai įspudis s

$$u(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega p(\omega|s)d\omega, \quad (75)$$

kur $p(\omega)$ tikmybinis tankis.

Kai gerumai bei įspudžiai diskretūs,

$$u(s_j) = \sum_i \omega_i P(\omega_i|s_j), \quad (76)$$

kur

$P(\omega_i | s_j)$ tikimybė, kad gerumas $\omega = \omega_i$,
kai jaunikis daro įspudį $s = s_j$.

Nuotakos sprendimo funkcija

Laukiamas naudingumas kai peršasi
paskutinis N -tasis jaunikis

$$u_N(s) = u(s), \quad (77)$$

nes tekėti būtina pagal uždavinio sąlygas.

Optimalus sprendimas $d_{N-1}(s)$, kai peršasi
 $(N - 1)$ -as jaunikis, randamas pagal formules:

$$u_{N-1}(s) = \max_d (du(s) + (1 - d)u_N), \quad (78)$$

$$d_{N-1}(s) = \arg \max_d (du(s) + (1 - d)u_N). \quad (79)$$

Analogiskai randam optimalų sprendimą
kai peršasi $(N - n)$ -tas jaunikis.

Taip gaunam nuotakos sprendimo funkciją

kuri nurodo kritinio įspudžio s priklausomybę
nuo jaunikio eilės numerio n .

”Daugkartinė” nuotaka

Nuotaka gali tekėti ir skirtis N kartų.

Jaunikio gerumą žymėsime ω .

Skaitysim, kad nuotaka ”aiškairegė”, $\omega = s$.

Turimo vyro gerumą žymėsime q .

Atsisakymo tekėti kainą žymėsime $c = \tau - l$,

τ laukimo nuostoliai,

l skirybų kaina. Tada laukiamas naudingumas kai peršasi

paskutinis N -tasis jaunikis

$$u_N(\omega, q) = \max_d (d\omega + (1 - d)(q_N - c_N)). \quad (80)$$

Priklausomybės

Optimalus sprendimas
priklauso nuo dviejų kintamųjų,
vyro gerumo q_N ir jaunikio gerumo ω_N :

$$d_N^* = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega_N > q_N - c_N, \\ 0, & \text{if } \omega_N \leq q_N - c_N \end{cases} \quad (81)$$

Maksimalus laukiamas naudingumas

Peršasi $(N - i)$ -as jaunikis

Maksimalus naudingumas priklauso nuo dviejų parametų, q ir ω .

$$u_{N-i}(\omega, q) = \max_d (d\omega + (1 - d)(u_{N-i+1}(q_{N-i+1}) - c_{N-i})).$$

Čia $u_{N-i+1}(q)$ yra laukiamas naudingumas $(N - i + 1)$ -mais metais, kai turimo vyro gerumas yra q .

$$u_{N-i+1}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{N-i+1}(\omega, q) p_{N-i+1}(\omega) d\omega. \quad (82)$$

Sprendimo funkcija

Kai peršasi $(N - i)$ -as jaunikis

$p_{N-i+1}(\omega)$ tai gerumo tikimybių pasiskirstymas $(N - i + 1)$ -mais metais.

$$q_{N-i+1} = \begin{cases} \omega_{N-i}, & \text{if } q_{N-i+1} < q_{N-i}^*, \\ q_{N-i}, & \text{if } q_{N-i+1} \geq q_{N-i}^* \end{cases}$$

q_{N-i}^* gaunam iš lygties

$$\omega_{N-i} = u_{N-i+1}(q_{N-i}^*) - c_{N-i}. \quad (83)$$

Optimalus sprendinys $(N - i)$ -ais metais

$$d_{N-i}^* = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega_{N-i} > u_{N-i+1}(q_{N-i+1}) - c_{N-i}, \\ 0, & \text{if } \omega_{N-i} \leq u_{N-i+1}(q_{N-i+1}) - c_{N-i} \end{cases}$$

Čia sprendimo funkcijos d_{N-i}^* priklauso nuo dviejų kintamųjų ω, q .
Tai sunkina skaičiavimus ir grafinį atvaizdavimą

Dietos uždavinys

$$\min_x \sum_{i=1}^m (c_i - s_i)x_i + g\left(\sum_{i=1}^m a_{i1} - b_1\right), \quad (84)$$

su sąlyga, kad

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (85)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (86)$$

Pavyzdžiui,

c_1 kilogramo duonos kaina,

a_{11} kalorijų kiekis kilograme duonos,

b_1 reikalingas kalorijų kiekis.

s_i skonio 'kaina', g grožio 'kaina'

Naudojami simplekso arba
vidinio taško metodai.

Simplekso algoritmas

Pavyzdys:

$$\min_x z \quad (87)$$

$$z = x_1 - x_3 \quad (88)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geq 0 \quad (89)$$

Čia x_2 bazinis kintamasis,

x_1, x_3 laisvi kintamieji. $x_1 = 1$ yra bazinis sprendinys gautas kai laisvi kintamieji $x_1 = x_3 = 0$, tada $z = 0$.

Ši sprendinį galima pagerinti didinant x_3 , nes $c_3 = -1 < 0$.

Kitas bazinis sprendinys

$x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$, kur $z = -1$, bus optimalus,

nes abiejų laisvų kintamųjų c_i neneigiami: $c_1 = 1, c_2 = 0$,

todel didinant x_1, x_2 nesumažinsi z .

Vagies uždavinys

Sveikaskaitinis programavimas (ILP)

$$\max_x \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad (90)$$

su sąlyga, kad

$$\sum_{i=1}^m g_i x_i \leq g, \quad (91)$$

$$x_i = \{0, 1\}. \quad (92)$$

c_i daikto i kaina, g_i daikto i svoris,
 g leistinas svoris.

$x_i = 1$ daikta i imti, $x_i = 0$, neimti

Kai m nedidelis,

naudojami šakų ir ribų metodai.

Kai m didelis,
naudojami heuristiniai metodai.

Šakų ir ribų metodas

Pavyzdys- vagies uždavinys:

$$\max_x \sum_{i=1}^m c_i x_i \quad (93)$$

$$\sum_{i=1}^m g_i x_i \leq g, \quad x_i = \{0, 1\}. \quad (94)$$

Ribos gaunamos iš pagalbinių LP uždavinių:

$$C_1 = c_1 + \max_x \sum_{i=2}^m c_i x_i \quad (95)$$

$$g_1 + \sum_{i=1}^m g_i x_i \leq g \quad (96)$$

$$C_0 = \max_x \sum_{i=2}^m c_i x_i \quad (97)$$

$$\sum_{i=2}^m g_i x_i \leq g \quad (98)$$

Šakų kirtimas

"Kertam" šaką 0 (neimti 1-jo daikto) ,

jei $C_0 \leq c_1$.

"Nekertam" ,

jei $C_0 > c_1$.

Nepalankiausias atvejas

Nepalankiausiu atveju, kai

$$c_i = c, g_i = g_i, i = 1, \dots, m$$

nenukirsim nei vienos šakos

ir todėl, teks sulyginti visas

$$N = 2^m$$

kombinacijų.

Atveju, kai

$$h_i = c_i/g_i = h, i = 1, \dots, m$$

galim nukirsti vieną-kitą šaką,

tačiau vis vien teks sulyginti beveik visas

$$N = 2^m$$

kombinacijas.

Palankiu atveju, kai h_i skiriasi,

nukirsim daug šakų.

Heuristiniai metodai

$$\max_x \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad (99)$$

$$\sum_{i=1}^m g_i x_i \leq g, \quad x_i = \{0, 1\}. \quad (100)$$

Čia heuristika

$$h_i = c_i / g_i. \quad (101)$$

"Gryna" heuristika kai imam daiktą

$$i^* = \arg \max_i h_i. \quad (102)$$

Čia $N \leq m^2$ tačiau galim "jstrigti". Todėl naudojam "mišrias" heuristikas.

Mišrios heuristikos

Pavyzdys- tas pats vagies uždavinys:

"Mišri" heuristika kai imam daikta i
su tikimybe r_i .

Tradicinis būdas

$$r_i = h_i / \sum_j h_j. \quad (103)$$

Bayes'o heuristinio algoritmo iliustracija:

$$r_i^0 = 1/m, \quad (104)$$

$$r_i^1 = h_i / \sum_j h_j, \quad (105)$$

$$r_i^\infty = 1, \text{ jei } h_i = \max_j h_j. \quad (106)$$

Heuristikų "mišinio" optimizavimas

Trijų heuristikų "mišinį"
parenkam pagal "loteriją"

$$x = (x_0, x_1, x_2),$$

kur

x_0 tikimybė naudoti algoritmą (104),

x_1 tikimybė naudoti algoritmą (105),

x_2 tikimybė naudoti algoritmą (106).

Loteriją x optimizuojam Bayes'o metodu
taip, kad atlikus K iteracijų
gauti geriausią rezultatą.

Todėl tai vadinam Bayes'o heuristiniu metodu.

Kitas šio metodo pavyzdys

tai mokyklos tvarkaraštis, kur x tikimybė, kad eilinio mokytojo "langai" bus
naikinami šioje iteracijoje.

Trečias pavyzdys- siuvyklos uždavinys
čia h_i tai darbo i vykdymo laikas.

Optimizavimo sudėtingumas

Algoritmas polinominis, kai skaičiavimo laikas

$T = Cm^K$, K sveikas skaičius, m uždavionio sudėtingumas.

Diskrečiu atveju, m kintamųjų skaičius.

Tolydiniu atveju, m garantuotas tikslumas, kai maksimali paklaida $\epsilon \leq 2^{-m}$.

Algoritmas eksponentinis, kai skaičiavimo laikas

$T \geq C2^m$.

"Ribiniu" atveju tai NP -pilna klasė.

Ši klasė pasižymi tuo, kad nėra įrodyta ar čia būtinai reikia eksponentinio algoritmo,

ar užtenka ir polinominio.

Polinominio algoritmo NP -pilnai klasei

dar niekas nesugalvojo, neįrodyta, kad jo nėra.

Sudėtingumo pavyzdžiai

Uždavinių sudėtingumo pavyzdžiai:

Tiesinio programavimo- polinominiai.

Vagies ir siuvyklos - NP -pilni.

Daugelio kintamųjų globalinio optimizavimo bendru atveju - eksponentiniai.

Čia skaičiavimo laikas

$$T \geq C2^{mn},$$

kur m tikslumas, n kintamųjų skaičius.

Lokalus optimizavimas

Nusileidimo metodai

Tikslo funkcija $f(x)$, $x = (x_i, i = 1, \dots, m)$,

$$x^{n+1} = x^n - \alpha_n s_n. \quad (107)$$

Žingsnio ilgis

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha} f(x^n - \alpha s_n). \quad (108)$$

Čia s_n žingsnio kryptis, n žingsnio numeris.

Metodas gradientinis, kai

$$s_n = \text{grad } f(x^n), \quad (109)$$

kur gradientas

$$\text{grad } f(x^n) = \left(\frac{\partial f(x^n)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, m \right). \quad (110)$$

Newton'o metodas

Metodas Newton'o, kai

$$s_n = H_n^{-1} \text{grad } f(x^n), \quad (111)$$

kur Hessian'as

$$H_n = \left(\frac{\partial^2 f(x^n)}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \dots, m \right). \quad (112)$$

Kvazi-Newton'o metodas

Metodas kvazi-Newton'o, kai

$$H_n^{-1} \approx G_n, \quad (113)$$

kur

$$G_{n+1} = G_n - \frac{(G_n \gamma_n)(G_n \gamma_n)^T}{\gamma_n^T G_n \gamma_n} + \frac{\delta_n \delta_n^T}{\delta_n^T \gamma_n}. \quad (114)$$

Čia T transponavimo ženklas,

$$\gamma_n = \text{grad } f(x_n) - \text{grad } f(x_{n-1}), \quad (115)$$

$$\delta_n = x^n - x^{n-1}, \quad (116)$$

$$G_0 = I. \quad (117)$$

Lokalus konvergavimas

Gradientinis konverguoja, kai $f(x)$ diferencijuojama ir iškila

$$\|x^n - x^*\| \rightarrow 0. \quad (118)$$

Newton'o ir Kvazi-Newton'o konverguoja greitai, kai $f(x)$ du kartus diferencijuojama ir iškila.

$$\frac{\|x^n - x^*\|}{\|x^{n-1} - x^*\|} \rightarrow 0, \quad (119)$$

kur x^* optimumas.

Newton'o metodo trukumas-

reikia surasti atvirkštinį Hessianą H_n^{-1} . Todėl, Newton'o metodas nedirba kai $\det H_n = 0$.

Šio trukumo neturi kvazi-Newton'o metodas.

Optimizavimas su ribojimais

$$\max_x f_0(x), \quad (120)$$

$$f_j(x) \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (121)$$

Baudų metodas

$$\max_x \left\{ f_0(x) - \sum_j b_j (f_j(x) - c_j)^2 \right\}, \quad (122)$$

kur baudos

$$b_j = \begin{cases} b, & \text{jei } f_j(x) > 0, \\ 0, & \text{jei } f_j(x) \leq 0 \end{cases} \quad (123)$$

Trukumas-neaiskus baudos b dydis:

kai b mažas- bus pažeisti ribojimai,

kai b didelis- gali būti perpildymų.

Lagranžo daugikliai

Uždavinys (120)(121) keičiamas uždaviniu

$$\min_{\lambda > 0} \max_x \{f_0(x) - \sum_j \lambda_j (f_j(x) - c_j)\}. \quad (124)$$

Ekonominė interpretacija:

$f(x)$ pelnas,

x technologija,

c_j resursas j ,

λ_j resurso j kaina,

sąlyga $\min_{\lambda > 0}$ reiškia, kad resurso c_j savininkas

nustato kainas λ_j tokias

kurios maksimizuoja jo pelną,

sąlyga \max_x reiškia, kad įmonės $f(x)$ savininkas

renkasi tokią technologiją x

kuri maksimizuoja jo pelną, esant kainoms λ .

Globalus optimizavimas

Tolygus tinklelis

$$r_n = \max_x \min_i \|x - x^i\|. \quad (125)$$

Tinklelis $x(n) = (x^i, i = 1, \dots, n)$ tuo geresnis, kuo didžiausia "skylė" r_n mažesnė

$$R_n = \arg \min_{x(n)} r_n. \quad (126)$$

Toks tinklelis minimizuoja maksimalią paklaidą optimizuojant Lifšico funkcijas

$$\frac{\|f(x^i) - f(x_j)\|}{\|x^i - x_j\|} \leq L < \infty, \quad (127)$$

kur L Lifšico konstantė, $\epsilon \leq LR_n$.

Kai x turi daug komponentų, naudojam aproksimacijas:

arba geresnę "Lptau", arba primityvią "Monte Carlo", kai x^i tikimybės vienos.

Bayes'o metodai

Tolygūs tinkleliai minimizavo
maksimalią paklaidą,
todėl reikalavo

$$T = C2^{mn}$$

laiko,

kur n kintamųjų skaičius,

m nurodo maksimalią paklaidą:

$$\epsilon \leq 2^{-m}.$$

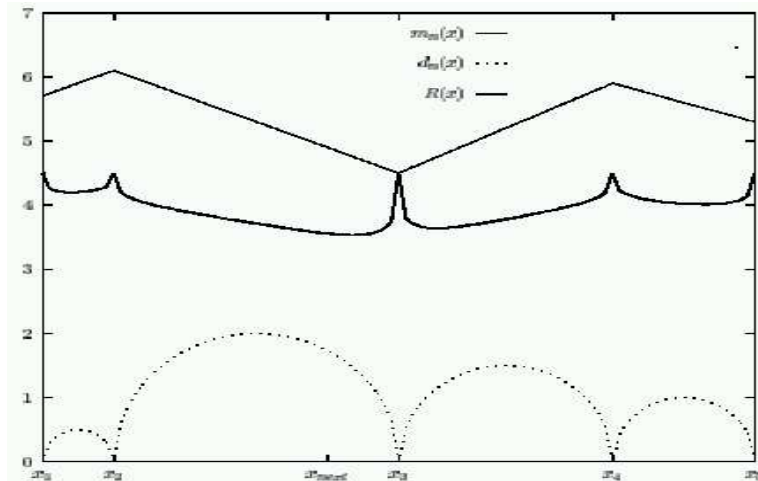
Tai labai brangu, kai m arba n dideli.

Tada naudojam Bayes'o metodus
kurie minimizuoja vidutinę paklaidą,
duotam iteracijų skaičiui.

Tam reikia parinkti statistinį funkcijos $f(x)$ modelį.

Kai $n = 1$ patogus Wiener'io modelis.

Figura2: Wiener'io modelis



Wiener'io modelio optimizavimas

Sąlyginis vidurkis $m_n(x)$,

Sąlyginė dispersija $d_n(x)$,

Rizikos funkcija $R(x)$,

Bayes'o metodas:

$$x^{n+1} = \arg \min_x R(x). \quad (128)$$

Rizikos funkcija

Wiener'io modelio rizikos funkcija

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi d_n(x))}} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(c_n, y_x) e^{-\frac{(y_x - m_n(x))^2}{d_n(x)}} dy_x$$

Čia

$$y_x = f(x),$$

$$c_n = \min_i f(x^i) - \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Matom, kad

$$R(x) = c_n, \text{ jei } x = x^i$$

nes

$$d_n(x^i) = 0.$$

Koordinatinis optimizavimas

Taikant Wiener'io modelį kai $m > 1$, patogus koordinatinis optimizavimas

$$x^1 = \operatorname{arg} \min_{x_1} f(x^0) \quad (129)$$

$$x^2 = \operatorname{arg} \min_{x_2} f(x^1) \quad (130)$$

.....

$$x^m = \operatorname{arg} \min_{x_m} f(x^{m-1}) \quad (131)$$

.....

Trūkumas: rezultatas priklauso nuo x^0 .

Privalumas: patogi vizualizacija, nes projekcijos vaizdžios.

Metodas konverguoja, jei

$$f(x) = \sum_i f_i(x_i). \quad (132)$$

Daugiamatis Bayes'o metodas

$$x^{n+1} = \arg \min_x R(x) \quad (133)$$

$$R(x) = y_{0n} - \min_i \frac{\|x - x_i\|^2}{f(x_i) - c_n}, \quad (134)$$

$$c_n = \min_i f(x^i) - \epsilon. \quad (135)$$

Kai n didelis

$$d^*/d_a = \left(\frac{f_a - f^* + \epsilon}{\epsilon} \right)^{1/2}$$

Čia

d^* stebėjimų tankis,

f^* funkcijos $f(x)$ vidurkis

(abu globalaus optimumo x^* aplinkoje)

d_A vidutinis stebėjimų tankis,

f_A funkcijos $f(x)$ vidurkis (abu visoje srityje A).

Vektorinis optimizavimas

Maksimizuojam vektorinę tikslo funkcija

$$f(x) = (f_i(x), i = 1, \dots, m). \quad (136)$$

Pareto optimumas tai aibė X^* .

$x^* \in X^*$, jei neatsiras tokio x , kad

$$f_i(x) \geq f_i(x^*), \quad \forall i \quad (137)$$

$$f_j(x) > f_j(x^*), \quad \exists j \quad (138)$$

Vektorinio optimizavimo metodai

Pilnas perrinkimas Tinka kai x reikšmių skaičius nedidelis **Skaliarizacija**

$$x(c) = \mathop{\text{arg max}}_x \sum_i c_i f_i(x) \quad (139)$$

$$c_i > 0 \quad (140)$$

Čia $x(c) \in X^*$

Ribojimai

$$x(b) = \mathop{\text{arg max}}_x f_1(x) \quad (141)$$

$$f_i(x) \geq b_i, \quad i = 2, \dots, m \quad (142)$$

Čia $x(b) \in X^*$, jei $x(b)$ vienintėlis.

Simulated Annealing (SA)

SA yra labai paplitęs
globalinio optimizavimo metodas. Žymėsime

$$h_j = f(x^j) - f(x^{j-1}), \quad (143)$$

jei $h_j \geq 0$, tai parenkamas x^j

jei $h_j < 0$, tai x^j parenkamas su tikimybe

$$r_j = \begin{cases} e^{\frac{h_j}{x/\ln(1+N)}}, & \text{if } h_j < 0, \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (144)$$

SA mėgstamas dėl jo paprasumo
ir dėl gero teorinio pagrindimo

SA praktini efektyvumą galima padidinti,
optimizuojant x , pavyzdžiui, Bayes'o metodu

Lentpjuvės uždavinys

Reikia minimizuoti atliekas
išpjaujant $i = 1, \dots, m$ lentų,
turint $j = 1, \dots, n$ rastių.

Visų jų dydžiai žinomi.

Žymėsime h_{ij} prioriteto taisyklę
siūlančią pjauti lentą i iš rasto j .

Pagrindinis sunkumas

tai sugalvoti gerą heuristiką h_{ij} .

Toliau kaip vagies uždavinys (93)-(100).

Pagrindiniai skirtumai:

- ten heuristikos h_i daiktams, kurių vertę maksimizuojam, laikantis svorio ribojimo,
- čia heuristikos h_{ij} poroms lenta-rastas, minimizuojam atliekas laikantis ribojimo,

kad lentos tilptų rastuose.

Lentpjuvės uždavinio formulavimas

$$\begin{aligned} \min_y v(y), \quad y = (y_{ijk}), & \quad (145) \\ i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\ a_i y_{ijk} \leq d_{ijk}. \end{aligned}$$

$v(y)$ yra atliekos, jos nustatomos kaip skerspjuvių skirtumas tarp išpjautų lentų ir panaudotų rastų.

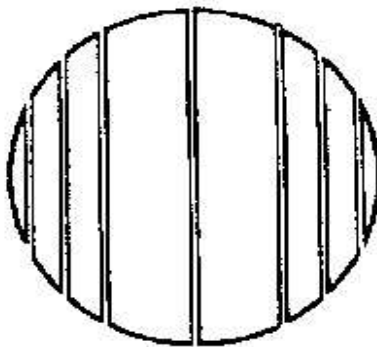
a_i yra lentos i storis.

d_{ijk} yra rasto j storis ten kur lenta i padėta vietoje k ,
žiur. figura "Ištisinis sastatas".

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \in (j, k), \\ 0, & \text{jei ne} \end{cases} \quad (146)$$

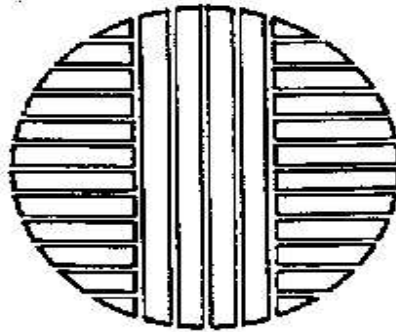
kur i yra lentos numeris. j yra rasto numeris. k nurodo i lentos vietą raste j . $i \in (j, k)$ reiškia, kad lenta i yra raste j vietoje k .

Figura 3: Ištisinis sąstatas



a- ištisinis

Figura 4: Segmentinis sąstatas



e - ištinis
segmentinis

Traukinių formavimas

Minimizuoti traukinių skaičių $n = n(y)$,
tikslu išvežti m vagonų iš prekių stoties.

$$\min_y n(y), \quad (147)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i y_{ij} \leq A_j, \quad (148)$$

$$\sum_{i=1}^m b_i y_{ij} \leq B_j. \quad (149)$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \in j, \\ 0, & \text{jei ne.} \end{cases} \quad (150)$$

a_i yra vagono i svoris.

A_j yra leistinas traukinio j svoris.

b_i yra vagono i ilgis.

B_j yra leistinas traukinio j ilgis.

$i \in j$ reiškia, kad vagonas i yra traukiny j .

Lošimų teorija ir pavyzdžiai

Tai tęsinys optimizavimo metodų kurso.

Optimizavimo kurse lošimų teorijos uždavinius nagrinėjom be teorinių pagrindų, tik kaip optimizavimo taikymo pavyzdžius.

Lošimų teorijos kurse bus teorija šiems uždaviniams pagrįsti.

Be to bus naujų lošimų bei rinkos teorijos uždavinių.

Namų darbai bus arba tobulinimas optimizavimo pavyzdžių, arba sprendimas naujų uždavinių.

Paprasciausias lošimas

Tai du lošėjai, du ėjimai.

Pirmojo išlošimas

$$u(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (151)$$

kur $i = 1, 2$ yra 1-jo ėjimas,

$j = 1, 2$ yra 2-jo ėjimas.

Antrojo išlošimas priesingas

$$v(i, j) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (152)$$

Tai antagonistinis lošimas:

ką vienas išlošia, kitas pralošia.

Lošimui aprašyti užtenka

vienos matricos $u(i, j)$.

Todėl tai matricinis lošimas.

Grynos ir mišrios strategijos

Gryna strategija, kai ėjimai daromi nenaudojant randomizacijos (lietuviškai "burtų").

Mišri strategija, kai ėjimai daromi burtu keliu, pagal lošėjų nustatytas tikimybes.

Čia svarbu vidutinis išlošimas

$$\begin{aligned}U(x, y) &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \\V(x, y) &= -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2\end{aligned}\tag{153}$$

kur

$0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2$ tai tikimybės, kad 1-sis

lošėjas darys ėjimą i ,

analogiškai y_i

Iš čia

$$\begin{aligned}U(x, y) &= 4x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 1 \\V(x, y) &= -4x_1y_1 + 2x_1 + 2y_1 - 1\end{aligned}\tag{154}$$

Pusiausvyros strategijos

Tai tokios strategijos,
kurių neapsimoka keisti.
Grynų strategijų aibėje to nėra.

Vienintelė pusiausvyros strategija mišri

$$x_i = y_i = 0.5 \quad (155)$$

$$U(x_1 = 1/2, y_1 = 1/2) = 0,$$

$$V(x_1 = 1/2, y_1 = 1/2) = 0 \quad (156)$$

$$x_2 = 1 - x_1, y_2 = 1 - y_1$$

nes čia

$$U(x_1 = 1/2 + \epsilon, y_1 = 1/2) < 0,$$

$$V(x_1 = 1/2, y_1 = 1/2 + \epsilon) < 0, \quad (157)$$

jei $\epsilon \neq 0$.

Bimatricinis lošimas

Čia $u(i, j) \neq -v(i, j)$, pavyzdžiui

$$u(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (158)$$

$$v(i, j) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (159)$$

Bimatricinio lošimo strategijos

Vidutinis išlošimas

$$\begin{aligned}U(x, y) &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \\V(x, y) &= -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1,\end{aligned}\tag{160}$$

arba

$$\begin{aligned}U(x, y) &= 4x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 1, \\V(x, y) &= -3x_1y_1 + x_1 + y_1.\end{aligned}\tag{161}$$

Pusiausvyros strategijos

Pusiausvyros strategijos

$$y_1 = y_2 = 1/2, \quad (162)$$

$$x_1 = 1/3, x_2 = 2/3, \quad (163)$$

$$u^* = U(x_1 = 1/3, y_1 = 1/2) = 0, \quad (164)$$

$$v^* = V(x_1 = 1/3, y_1 = 1/2) = 1/3, \quad (165)$$

nes

$$U(x_1 = 1/3 + \epsilon, y_1 = 1/2) < 0, \quad (166)$$

$$V(x_1 = 1/3, y_1 = 1/2 + \epsilon) < 0, \quad (167)$$

jei $\epsilon \neq 0$.

Nejautrus apgavystei algoritmas

Žymesim

$$U(1, y) = y_1 - y_2, \quad (168)$$

$$U(2, y) = -y_1 + y_2, \quad (169)$$

$$V(x, 1) = -x_1 + x_2, \quad (170)$$

$$V(x, 2) = x_1, \quad (171)$$

kur $U(1, y)$ tai vidutinis 1-jo išlošimas naudojant ėjimą $i=1$, kai 2-sis eina pagal tikimybes y , kitoms eilutėms panašiai.

Strategijos x, y nejautrios apgavystei, jei

$$U(1, y) = U, \quad (172)$$

$$U(2, y) = U,$$

$$V(x, 1) = V,$$

$$V(x, 2) = V.$$

(173)

Sprendimo būdai

Sprendžinat (23) galim naudoti standartinius tiesinių lygčių sprendimo algoritmus.

Tačiau, kadangi čia yra nelygybių

$0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_i \leq 1, x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$, tai patogiau naudoti tiesinį programavimą,

smulkiau aprašytą inspektorius uždavinyje.

Grynų strategijų pusiausvyra

Jei $V(x, 1) < V(x, 2)$, nepriklausomai nuo tikimybių x , tai 2-sis naudos gryną strategiją $j = 2$, pavyzdžiui

$$u(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (174)$$

$$v(i, j) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (175)$$

Pusiausvyra bus kai $i = 2, j = 2$, tada išlošimai $u(2, 2) = 1, v(2, 2) = 2$.

Tiesinio programavimo uždavinys (23) šiuo atveju sprendinio neturi. Todėl, algoritmą (23) reikia papildyti grynų strategijų perrinkimo bei kvadratinio eliminavimo algoritmais.

Sandėris

Jei lošimas neantagonistinis $v(i, j) \neq -u(i, j)$, tai galimas sandėris. Pavyzdžiui, inspektorius ir brakonierius gali susitarti pasidalinti briedį. Tačiau, neaišku kaip pasidalinti. Atsakymą duoda Nash'o sandėris. Sandėris priklauso nuo leistinų dalybų aibės D , bei nuo to ka lošėjai gautų, jei nesusitartų

$$\begin{aligned}u^* &= \max_x \min_y U(x, y), \\v^* &= \max_x \min_y V(x, y).\end{aligned}\tag{176}$$

u^* 1-jo lošėjo maksimalus garantuotas išlošimas, o v^* - 2-jo. Sudarius sandėrį (\bar{u}, \bar{v}) , 1-sis gauna \bar{u} , 2-sis \bar{v} . Sandėris (\bar{u}, \bar{v}) vienareikšmis, jei tenkinamos kelios gana priimtinos sąlygos.

Nash'o aksiomos

1. $(\bar{u}, \bar{v}) \geq (u^*, v^*),$
2. $(\bar{u}, \bar{v}) \in D,$
3. jei $(u, v) \in D$ ir $(u, v) \geq (\bar{u}, \bar{v}),$
tai $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}),$
4. jei $(\bar{u}, \bar{v}) \in T \subset D$ ir $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(D, u^*, v^*),$ tai $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(T, u^*, v^*),$
5. tegu aibę D' gaunam iš D taip
 $u' = a_1u + b_1, v' = a_2v + b_2,$ tada, iš $\phi(D, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$ seks, kad
 $\phi(D', a_1u + b_1, a_2v + b_2) = (a_1u + b_1, a_2v + b_2),$
6. jei $(u, v) \in D \Leftrightarrow (v, u) \in D, u^* = v^*$ ir $\phi(D, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v}),$ tai
 $\bar{u} = \bar{v}.$

Sandėrio funkcija

Galiojant Nash'o aksiomoms
egzistuos vienintelė sandėrio funkcija

$$\phi(D, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$$

Jei atsiras tokia pora $(u, v) \in D$, kad $u > u^*$, $v > v^*$, tai sandėris

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \arg \max_{u,v} (u - u^*)(v - v^*), \quad (177)$$

kur

$$(u, v) \in D, \quad u \geq u^*, \quad v \geq v^* \quad (178)$$

Parastai bendras išlošimas yra ribotas, tada

$$D = \{(u, v) : u + v \leq c\}. \quad (179)$$

Čia sandėris

$$\begin{aligned} & (\bar{u}, \bar{v}) = \\ & ((c + u^* - v^*)/2, (c + v^* - u^*)/2) \end{aligned} \tag{180}$$

Sandėrio pavyzdys 1

Tai bimatricinis lošimas (158)(159),

kur $(u^*, v^*) = (0, 1/3)$.

Čia bendras išlošimas $u + v$ neribotas,

todėl, iš (177),(164),(165),

sandėris $(\bar{u}, \bar{v}) = (1, 1)$.

Kai bendras išlošimas ribotas, $u + v \leq c = 1$,
sandėris bus kitas.

Iš (180) sandėris $(\bar{u}, \bar{v}) = (1/3, 2/3)$.

Kai bendras išlošimas dar mažesnis, $c = 1/3$,

tai sanderyje $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 1/3)$

1-sis nieko negaus, todėl jame nedalyvaus,

nes lošdamas gaus nemažiau,

kadangi $u^* = \bar{u}$.

Sandėrio pavyzdys 2, inspektorius

Inspektoriaus sandėris su brakonierium.

Lošimą aprašo (158)(159).

Čia bendras išlošimas $c = 1$.

garantuoti išlošimai

$$u^* = 2/9, v^* = 5/9.$$

Iš (180), sandėris

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (1/3, 2/3).$$

Šis sandėris įvyks, nes

$$(1/3, 2/3) > (2/9, 5/9)$$

Sandėrio nebus, jei laukiama bauda

inspektoriui už sandėrį

$$B > \bar{u} - u^* = 1/9.$$

Čia $B = p_b b$, kur p_b tai baudos b tikimybė.

Kai bauda $b = 1$ lygi briedžio kainai,
baudos tikimybė $p_b > 1/9$.

Sandėrio pavyzdys 3, streikas

Įmonės šeimininkų strategija $x \in [0, a]$,
tai mokėti atlyginimą x , kur a įmonės pajamos.
Darbininkų strategijos

$$y = \begin{cases} 0, & \text{streikuoti} \\ 1, & \text{dirbti} \end{cases} \quad (181)$$

Šeimininkų išlošimas

$$u(x, y) = \begin{cases} a - x, & \text{jei } y = 1 \\ -x, & \text{jei ne.} \end{cases} \quad (182)$$

Darbininkų išlošimas

Darbininkų išlošimas

$$v(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x > 0 \\ -b, & \text{jei } x = 0. \end{cases} \quad (183)$$

Čia garantuoti išlošimai $u^* = 0$, $v^* = -b$,
kur b darbininkų nuostoliai nieko neuždirbant,
Čia bendras išlošimas $c = a$.

Tegu $b < a$, tada iš (180) sandėris

$$(\bar{u}, \bar{v}) = ((a + b)/2, (a - b)/2). \quad (184)$$

Pusiausvyros apibrėžimas

Yra m lošėjų. Jie naudoja strategijas y_j , $j = 1, \dots, m$. Lošėjo i vidutinis išlošimas

$$u_i = u_i(y_j, j = 1, \dots, m), \quad i = 1, \dots, m$$

priklauso ir nuo to ką daro kiti.

Pradinę strategiją žymėsime $y^0 = (y_j^0, j = 1, \dots, m)$. Vadinsim ją sutartine. Skaitysime, kad individualūs lošėjai pakeis savo sutartines strategijas, jei tai padidins jų išlošimą. Taip gausime "apgavystės" strategijas

$$y_j^1 = \arg \max_{y_j} u_j(y_1^0, \dots, y_j, \dots, y_m^0), \quad (185)$$
$$j = 1, \dots, m$$

Nash'o pusiausvyra tai tokia strategija, kurios neapsimokės keisti nei vienam lošėjui. Taip bus jei

$$y_j^1 = y_j^0, \quad j = 1, \dots, m \quad (186)$$

Kelių lošėjų kooperavimą aptarsime kalbėdami apie koalicijas.

Pusiausvyros sąlygos

Pusiausvyra nevisada egzistuoja.

Pusiausvyra egzistuos, jei išlošimo funkcijos $U(x, y)$, $V(x, y)$ ir strategijų aibės $x \in X, y \in Y$ bus iškilos.

Funkcija $f(x)$ bus iškila, jei tiesės jungiančios poras $f(x^1), f(x^2) \in X$ bus žemiau $f(x), x \in X$.

Aibė X bus iškila, jei tiesės jungiančios taškų poras x^1, x^2 priklausys aibei X .

Funkcijos iškiluma iliustruoja Figura 1 "Globalus ir lokalus minimumai" (minimizuojant funkcijos iškilumas dažnai suprantamas "atvirkščiai").

Paprasto lošimo pavyzdy grynų strategijų aibė neiškila, todėl ir pusiausvyros nėra. Mišrių strategijų aibė iškila, tai užtikrina pusiausvyros egzistavimą.

Iliustracijos Walras'o uždavinys.

Susitraukiantis operatorius

Salygos (185) nusako operatorių T

$$z^{n+1} = T(z^n) \quad (187)$$

kuris transformuoja vektorių $z^n = (y_j^n, j = 1, \dots, m)$ kitą vektorių z^{n+1} .
Operatorius T susitraukiantis kai

$$\frac{\|T(z^{n+1}) - T(z^n)\|}{\|z^{n+1} - z^n\|} \leq \rho < 1 \quad (188)$$

Pusiausvyra stabili jei T susitraukiantis, jei ne, tai neaišku.

Figura 5: Nejudantis taškas

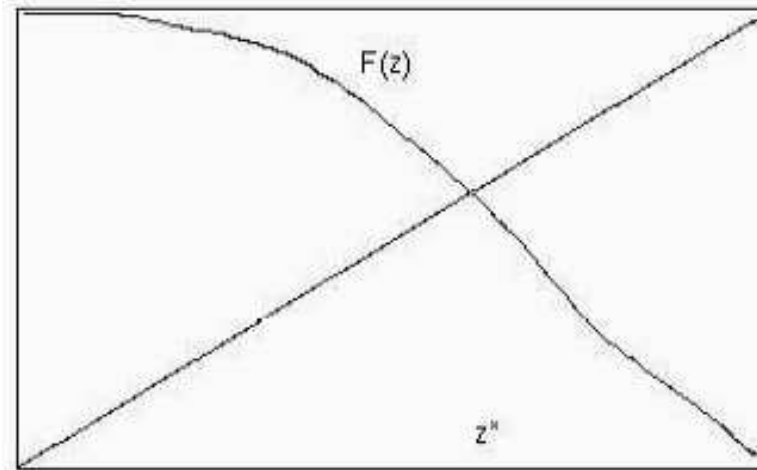


Figura 6: Nèra nejudančio taško

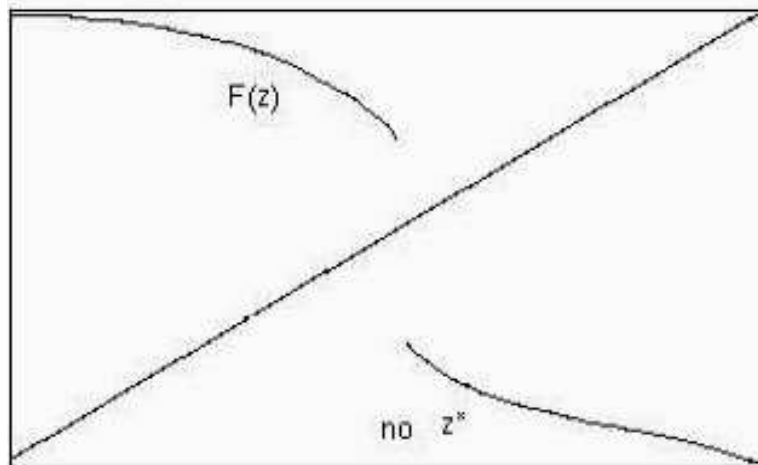


Figura 7: Daug nejudančių taškų

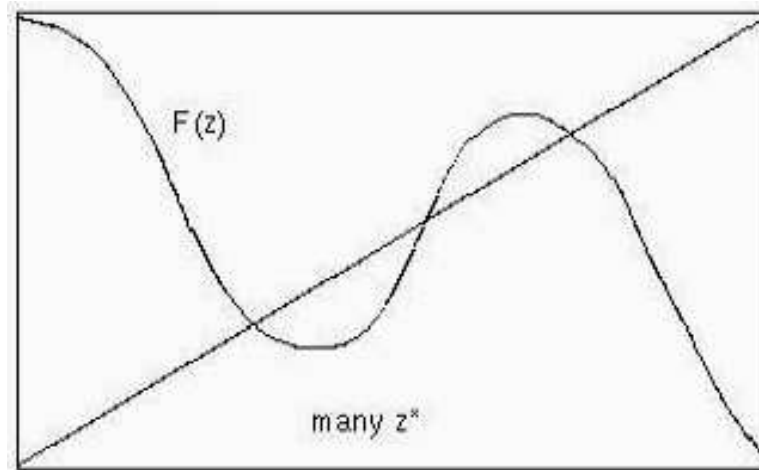


Figura 8: Stabilus nejudantis taškas

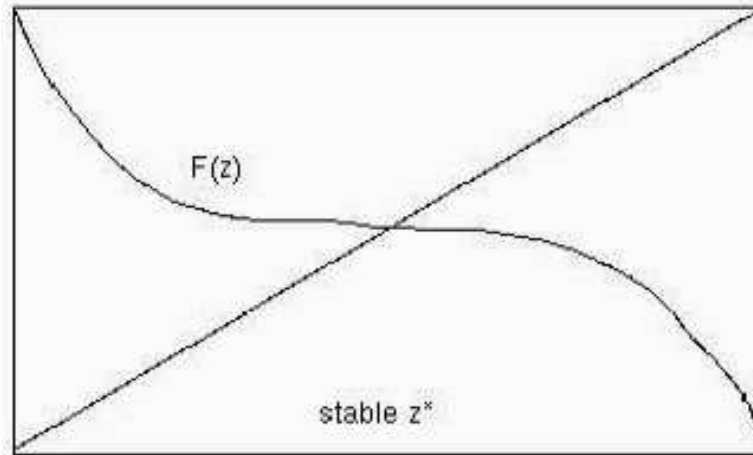


Figura 9: Nestabilus nejudantis taškas

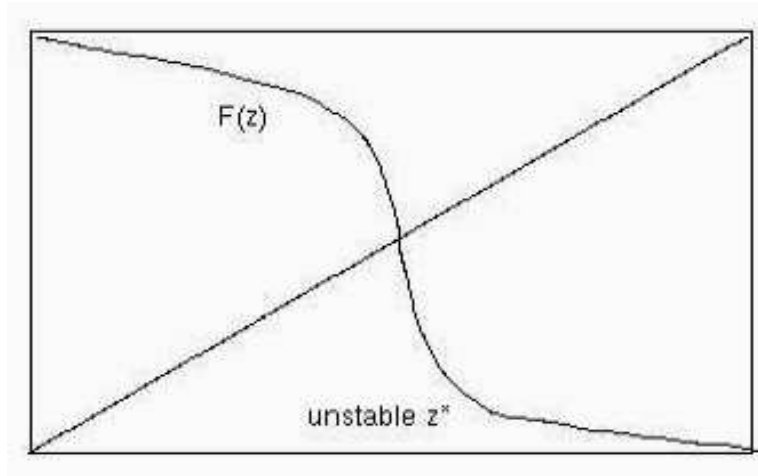
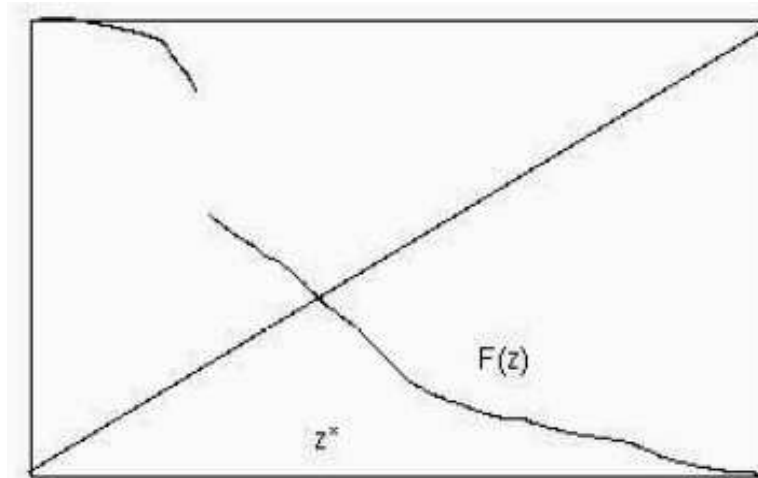


Figura 10: Nejudantis taškas egzistuoja



Kooperatinai lošimai

Kai lošėjų skaičius $m > 2$,
svarbią rolę įgyja koalicijos.
Ypač reikšmingas jų stabilumas.
Trijų serverių pavyzdys yra skaidrėje
"Stabilios koalicijos".
Programiškai jis dar nerealizuotas.

Koalicijų stabilumą apsprendžia tai
ar daugiau gausim lošdami kartu, ar atskirai.
O tai ka gausim, priklauso
ir nuo bendro koalicijos išlošimo
ir nuo šio išlošimo dalybų.

Garantuotą koalicijos išlošimą nurodo
charakteringa funkcija.

Teorinis dalybų pagrindas tai dominavimo sąvoka.

Charakteringa funkcija

S tai visų lošėjų aibė.

$s \subset S$ tai koalicija.

Maksimalus garantuotas koalicijos s išlošimas

$$v(s) = \max_x \min_y u_s(x, y). \quad (189)$$

Čia $x = x(s)$, koalicijos s strategija,
 $y = y(S \setminus s)$, likusių lošėjų koalicijos strategija,
 $v(s)$, charakteringa funkcija.

Lošimas v su pastovia suma, jei

$$v(s) + v(S \setminus s) = v(S). \quad (190)$$

Lošimas esminis, jei

$$\sum_{i \in S} v(i) < v(S). \quad (191)$$

Kooperatinio lošimo pavyzdys 1

Trys berniukai

Čia trys lošėjai $i = 1, 2, 3$. Indeksai j žymi koalicijas s_j , kur $s_1 = \{1, 2\}$, $s_2 = \{1, 3\}$, $s_3 = \{2, 3\}$. Koalicijų s_j išlošimai bei jų dalybos lošėjams i

$$u(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (192)$$

Lošimo charakteringa funkcija

$$v(s) = \begin{cases} 2, & \text{jei } |s| = 2 \\ -2, & \text{jei } |s| = 1 \end{cases} \quad (193)$$

Čia $|s|$ koalicijos narių skaičius. Lošimas v su pastovia suma, nes

$$v(s) + v(S \setminus s) = v(S) = 0. \quad (194)$$

Lošimas esminis, nes

$$\sum_{i \in S} v(i) = -6 < v(S) = 0. \quad (195)$$

Kooperatinio lošimo pavyzdys 2

UAB

Čia keturi akcininkai $i = 1, 2, 3, 4$ ir visos jų koalicijos, po vieną, po du, po tris ir visi keturi kartu. Akcijų kiekis g_i atitinkamai 10, 20, 30, 40. Koalicija s_j išlošia, jei $G_j > 50$, kur $G_j = \sum_{i \in s_j} g_i$. Lošimo charakteringa funkcija

$$v(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{jei } G_j > 50 \\ 0, & \text{jei } G_j \leq 50 \end{cases} \quad (196)$$

Lošimas v su pastovia suma, nes

$$v(s) + v(S \setminus s) = v(S) = 0. \quad (197)$$

Lošimas esminis, nes

$$\sum_{i \in S} v(i) = 0 < v(S) = 1. \quad (198)$$

Dalybos

z_i tai lošėjo i dalis dalybose $z = (z_1, \dots, z_m)$, Dalybos realios jei

$$\sum_{i \in S} z_i = v(S) \quad (199)$$

$$z_i \geq v(i) \quad (200)$$

Dalybos z dominuos dalybas w koalicijoje s

$z \succ_s w$,

jei

$$\sum_{i \in s} z_i \leq v(s) \quad (201)$$

$$z_i > w_i, \quad i \in s \quad (202)$$

Jei atsiras koalicija s kuriai galios (201)(202), tai rasysim, kad

$z \succ w$

Branduolys

Lošimo v branduoliu $C(v)$ vadinsime aibe visų nedominuojamų dalybų. Branduolys užtikrina visu koaliciju stabilumą, nes niekas nenorės pakeitimu. Praktiškai tai reiškia ekonominį ir politinį stabilumą.

Dėja, branduolio nebus, $C(v) = \emptyset$, kai lošimas esminis su pastovia suma

$$\sum_{i \in S} v(i) < v(S),$$
$$v(s) + v(S \setminus s) = v(S).$$

Pavyzdžiuose 1 ir 2 branduolio nebus.

Nash'o uždavinį branduolys čia gali egzistuoti, nes tai nėra lošimas su pas-

tovia suma.

Kai bus programa, patikrinsim.

Shapley vektorius

Kai nėra branduolio, dalyboms naudoja Shapley vektorių. Shapley dalybos bus stabilios, jei visi lošėjai supras šias Shapley sąlygas ir su jomis sutiks.

Tegu

1. $\sum_{i \in s} \phi_i[s] = v(s)$,
kur $\phi_i[s]$ Shapley dalybos,
2. $\phi_{\pi(i)}[\pi v] = \phi_i[v]$, kur π lošėjų perstatymas,
3. $\phi_i[u + v] = \phi_i[u] + \phi_i[v]$, kur u ir v du lošimai.

Tada egzistuos vienintelė Shapley dalybų funkcija

$$\phi_i[v] = \sum_{s \subset S, i \in s} (|s| - 1)! (|S| - |s|)! / |S|! (v(s) - v(s \setminus \{i\})), \quad (203)$$

Matom, kad "nenulinės" yra tik "jdomios"
lošėjui i koalicijo s , t.y. tos kurios su juo išlošia,
o be jo ne. Jų aibes žymėsime S_i .

Shapley dalybų pavyzdžiai

Trijų berniukų pavyzdys

$$S_1 = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}\}, S_2 = \{s_2, s_3\}, \{s_1, s_2\}, S_3 = \{s_2, s_3\}, \{s_1, s_3\}\}.$$

Iš (203)(193) Shapley dalybos

$$\begin{aligned} \phi_i[v] &= (2-1)!(3-2)!/3! + \\ & (2-1)!(3-2)!/3! = 1/3. \end{aligned} \tag{204}$$

UAB pavyzdys

UAB pavyzdyje

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\},$$

$$S_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\},$$

$$S_4 = \{\{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

$$I(203)(196)$$

$$\phi_1[v] = (2 - 1)!(4 - 1)!/4! = 1/12,$$

$$\begin{aligned} \phi_2[v] &= 2(3 - 1)!(4 - 3)!/4! + \\ &\quad (2 - 1)!(4 - 2)!/4! = 3/12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3[v] &= 2(3 - 1)!(4 - 3)!/4! + \\ &\quad (2 - 1)!(4 - 2)!/4! = 3/12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4[v] &= 3(3 - 1)!(4 - 3)!/4! + \\ &\quad 2(2 - 1)!(4 - 2)!/4! = 5/12. \end{aligned}$$

Dalybų stabilizacija

Stabilios tik branduolio dalybos, nes kiekvienam aišku, kad jų neapsimoka keisti. Shapley dalybos bus stabilios

tik su papildoma sąlyga, kad visi lošėjai numato partnerių reakciją ir jos pasėkas.

Butent tai įvertina Shapley aksiomos.

Dalybas galima stabilizuoti baudomis arba premijomis.

Stabilizacijos pavyzdys 1

Trijų berniukų lošime įvesim

”vienybės” pemiją: po vienetą kiekvienam.

Tada, išlošimų lentelėje (192) atsiras

ketvirtas stulpelis skirtas koalicijai $s_4 = \{1, 2, 3\}$

$$u(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (205)$$

Lošimo charakteringa funkcija

$$v(s) = \begin{cases} 2, & \text{jei } |s| = 2 \\ -2, & \text{jei } |s| = 1 \\ 3, & \text{jei } |s| = 3 \end{cases} \quad (206)$$

Branduolys pavyzdyje 1

Trijų berniukų lošime įvesim

Lošimas v ne su pastovia suma

$$v(s) + v(S \setminus s) \neq v(S) = 3, \quad |s| < 3. \quad (207)$$

Čia branduolį $C(v) = (1, 1, 1)$

realizuoja koalicija $s_4 = \{1, 2, 3\}$.

Stabilizacijos pavyzdys 2

UAB lošime įveskim baudą -1
tai koalicijai, kurios nariai nesilaiko įstatymu
numatytų pelno dalybų
proporcingai akcijų skaičiui.
Lošimo charakteringa funkcija

$$v(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{jei } G_j > 50 \text{ ir } z_i \in Z, i \in s_j \\ 0, & \text{jei } G_j > 50 \text{ ir } z_i \notin Z, i \in s_j \\ -1, & \text{jei } G_j \leq 50 \text{ ir } z_i \notin Z, i \in s_j \end{cases}$$

Čia Z proporcingos dalybos. Tada baranduolį $C(v) = (10, 20, 30, 40)$
realizuoja koalicija $s = \{1, 2, 3, 4\}$.

AR-ABS modelis

Tai auto-regresijos modelis

$$w_t = \sum_{i=1}^p a_i w_{t-i} + \epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \quad (208)$$

kur

w_t prognozė rytoj

w_{t-1} ši diena,

ϵ_t atsitiktinė paklaida rytoj,

a_i įtakos koeficientai,

juos nustatom minimizuodami

$$f(x) = \sum_{t=1}^T |\epsilon_t|. \quad (209)$$

AR-ABS modelio sprendimas

Tinka tiesinis programavimas

$$\begin{aligned} & \min_{a,u} \sum_{t=1}^T u_t \\ & u_t \geq \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \\ & u_t \geq -\epsilon_t \quad t = 1, \dots, T, \\ & a_i = a_i^1 - a_i^2, \quad a_i^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$